

1章



運動方程式

物理とは一体どんな科目なのか？要は「公式&法則を覚えさえすれば大抵の問題は解けるが、その理屈から理解するには数学の知識が欠かせない」科目、それが（少なくとも高校範囲の）物理だと思います。早速具体例を見てきましょう。

✿ 運動方程式

物理基礎で、「運動方程式」としてこんなものを習うはずです。

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

m は物体の質量、 \vec{a} は加速度、 \vec{F} は物体に働く力ですね。これ、実は結構すごい式で、この式一つから重要な法則をいくつも導き出せるんです。ただしその過程で、数Ⅲで習う「微分・積分」の知識が必要になります。以下は「こんなものがあるのか、ふーん」くらいの軽い気持ちで見てもらえたら十分です。

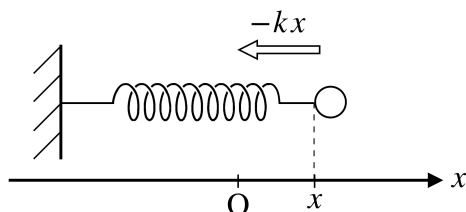
まず前提として、加速度は速度の時間微分（＝ある一瞬の時間における速度変化）に等しいので、次のように表すことができます。

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \left(\frac{dv}{dt} \text{ は } v = \text{速度を } t = \text{時間で微分したもの、という意味です} \right)$$

例えば、ばね定数 k のばねにつながれた質量 m のおもりの運動を考えてみましょう。

ばねの自然長の位置 O を原点とすると、左図のように位置 x では弾性力 $-kx$ が働くので、おもりの運動方程式は

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -kx \\ \Leftrightarrow m \frac{dv}{dt} + kx &= 0 \end{aligned}$$



この式の両辺に v をかけて時間 t で積分します（この操作自体に意味は無いです）。

$$\int m \cdot v \cdot \frac{dv}{dt} dt + \int kx \cdot \underline{v} dt = \int 0 \cdot dt$$

また、速度 v は位置 x の時間微分（＝ある一瞬の時間における位置変化）に等しいから、 $v = \frac{dx}{dt}$ と表すことができ、これを下線部に代入してあげると、

$$\int m \cdot v \cdot \frac{dv}{dt} dt + \int kx \cdot \underline{\frac{dx}{dt}} dt = \int 0 \cdot dt$$

$$\Leftrightarrow \int m v dv + \int k x dx = \int 0 \cdot dt$$

$\int \Delta v$ とは Δ を v について積分するという意味です。

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = C \quad (C \text{ は定数})$$

こんな式が出てきました。おもりの運動エネルギーは $\frac{1}{2} m v^2$ 、ばねの弾性エネルギーは $\frac{1}{2} k x^2$ ですから、これは「運動エネルギーと弾性エネルギーの和は常に一定だよ」と言っている訳です。そう、力学的エネルギー保存則ですね。

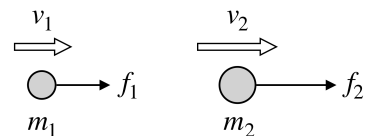
*** **

もう一つ例を紹介します。時間 t において、速度 v_1, v_2 で動く質量 m_1, m_2 の物体に、それぞれ力 f_1, f_2 がはたらくとします。このとき、2物体の運動方程式は

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = f_1 \quad m_2 \frac{dv_2}{dt} = f_2$$

2物体に働く外力の総和が0、すなわち $f_1 + f_2 = 0$ ならば、

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 \frac{dv_2}{dt} = f_1 + f_2 = 0$$



この式の両辺を t で積分すると次のようになります。

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = C \quad (C \text{ は定数})$$

この式は、条件を満たせば「2物体全体の運動量は常に一定だよ」と訳すことができますね。運動量保存則そのものです。何が言いたいかというと、すべての法則は、実は数学によって「つながっている」ということです。しかしながら大半の学校では「暗記しろ」と言われ公式を別々に覚えさせられます。だから物理がただの暗記ゲームになって、多くの人が途中で挫折してしまうのです。重要なのは法則そのものよりも、その導出過程です。もちろん、今から微分積分を勉強しろということではありませんよ。まずは学校で配られた教科書や参考書をじっくり読み込むことから始めてください。教科書には「なぜその法則が生まれるのか」、その成